УДК 51-7:519.87

ВИКОРИСТАННЯ ОРТОГОНАЛЬНИХ ТА БІОРТОГОНАЛЬНИХ РОЗКЛАДІВ В ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ

Валентина Собко[1], Олег Браташ[1], Оксана Ільків[2]

[1]*Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України*

[2]*Львівський державний університет фізичної культури*

Вступ. Вирішення низки важливих науково-прикладних проблем теорії масоперенесення та термомеханіки ґрунтується на ефективності існуючих аналітико-числових методів розв'язування відповідних задач математичної фізики і опрацювання реальних експериментальних даних із урахуванням апріорної інформації. Потреба обробки інформації виникає при вирішенні більшості прикладних задач. Під поняттям інформації ми розуміємо сукупність знань про процеси та параметри певних об'єктів. Важливим фактором успішного вирішення прикладних задач є якість обробки інформації. Інформація, як відомо, передається за допомогою сигналів, які можуть бути різного виду. Важливою характеристикою сигналу є його спектр, який є сукупністю гармонічних та негармонічних сигналів, сума яких рівна даному сигналу.

Суть спектральних методів. Спектральні методи використовують як в теоретичних дослідженнях, так і для розв'язування широкого класу задач математики і механіки. Спектральні методи розв'язування задач зводяться до обчислення узагальнених $f_n \ \left(n = 0, \cdots, \infty\right)$ спектрів, а способи їх обчислення залежать від виду вхідної інформації. Їх суть полягає в тому, що функції, які входять у модель, подають у вигляді ортогональних рядів за вибраним базисом. Знаходження розв'язку зводиться до обчислення коефіцієнтів ортогонального ряду шуканого розв'язку. Позитивними сторонами є те, що багато ортогональних базисів достатньо добре дослідженні, прості у використанні та побудовані на їх основі алгоритми розв'язування легко піддаються автоматизації. До негативних сторін можна віднести те, що сумування відповідних рядів, як правило, є некоректною задачею. Далі, не всі критерії, які ставляться до рішень задач, можна задовольнити застосуванням одного ортогонального базису. У зв'язку з тим для більш широкого задоволення критеріїв або модифікуються існуючі базиси, або будуються нові. Одним з шляхів врахування згаданих зауважень є застосування біортогональних розкладів. На сьогодні є небагато праць, присвячених їх дослідженню та практичному використанню. Це, в основному, викликано тим, що побудова біортогональних базисів пов'язана зі значними обчислювальними труднощами і вони недостатньо вивчені.

При заданні вхідних значень в дискретній формі $f(x_j),\ j = \overline{1, N}$, для знаходження узагальнених спектрів можна використати квадратурні формули, метод найменших квадратів або ж інші способи. Можна вказати оптимальну в класі L_2 формулу для обчислення узагальнених спектрів.

Нехай многочлени $u_n(x)$ ортогональні на проміжку $[a, b]$ та

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n}{r_n} u_n (x).$$

Відомо, що $N+1$–ий ортогональний многочлен має $N+1$ дійсний корінь, які належить до проміжку ортогональності. Тоді має місце оптимальна в L_2 квадратурна формула

$$\varphi_n=\sum_{j=0}^{N} \rho_j^2 u_n (x_j) \varphi(x_j), \quad u_{N+1}(x_j)=0, \ \rho_j^{-2}=\sum_{i=0}^{N} u_i^2 (x_j).$$

Апроксимація сигналів в базисі многочленів Чебишева-Лагерра. Серед спектральних базисів заслуговують на увагу базиси многочленів Якобі $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ за просторовою змінною та Чебишева-Лагерра $L_n^{\lambda}(t)$, за часовою змінною, де $\alpha>-1, \beta>-1$, $\lambda>-1$ – вільні параметри, n – порядок многочлена.

При апроксимації цифрової інформації вибір виду апроксимації функції $f(t)$ можна вибирати різного виду рядами, зокрема

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\overline{f}_n}{\Gamma(n+\lambda+1)} L_n^{\lambda}(t), \quad f(t)=t^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n\, n!L_n^{\lambda}(t)}{\Gamma(n+\lambda+1)},$$

$$f(t)=t^{\lambda} e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\hat{f}_n}{\Gamma(n+\lambda+1)} L_n^{\lambda}(t),$$

в залежності від апріорної інформації.

Многочлени Чебишева-Лагерра при великих n мають наступну поведінку $L_n^{\lambda}(t)=O\left(e^{t/2}\, t^{-(2\lambda+1)/4}\, n^{(2\lambda-1)/4}\right)$. За рахунок цього значно звужується клас задач, в яких використовується ортогональне перетворення, оскільки виникають обчислювальні труднощі при сумуванні ряду для великих t. На практиці ця проблема розв'язується введенням масштабного множника.

Узагальнене перетворення Чебишева-Лагерра

$$f_n=\int_0^{\infty} t^{\nu\lambda+\nu-1} e^{-\mu t^{\nu}} L_n^{\lambda}(\mu t^{\nu}) f(t)\,dt, \ \mu>0, \quad |\nu|<\infty, \quad \nu\neq 0.$$

Тоді

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!f_n}{\Gamma(n+\lambda+1)} L_n^{\lambda}(\mu t^{\nu}).$$

Застосування функцій Лагерра $\varphi_n(t)=e^{-t/2} L_n^{\lambda}(t)$ ортогональних на $[0,\infty)$. При $n\to\infty$ і $t\to\infty$ функції Лагерра $\varphi_n(t)$ прямують до нуля. Нехай

$$f(t)=t^{\lambda} e^{\gamma\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{r_n} \varphi_n(t/h).$$

Тоді для обчислення коефіцієнтів f_n мають місце формули

$$f_n=\int_0^{\infty} e^{-\gamma h\tau} f(h\tau) \varphi_n(\tau)\,d\tau, \ \ f_n\approx\sum_{m=0}^{N} \frac{\lambda_m e^{-\gamma h\lambda_m} f(h\lambda_m)}{[(N+2)\varphi_{N+2}(\lambda_m)]^2} \varphi_n(\lambda_m).$$

Обчислювальний експеримент. Ваговою функцією для $L_n^{\lambda}(\mu t^{\nu})$ є $\omega(t)=\mu^{\lambda+1}\nu t^{\lambda\nu+\nu-1}e^{-\mu t^{\nu}}$. Апроксимуємо функцію $f(t)=t^{-\alpha}$ узагальненими многочленами Чебишева Лагерра. Для $f(t)_{пер.}=t^{-\alpha}$ маємо

$$f_n=\mu^{\lambda+1}\nu\int_0^{\infty}t^{\lambda\nu+\nu-\alpha-1}e^{-\mu t^{\nu}}L_n^{\lambda}(\mu t^{\nu})dt\ ,$$

або

$$f_n=f_{n-1}\frac{(\frac{\alpha}{\nu}+n-1)}{n}\approx\mu^{\frac{\alpha}{\nu}}\frac{\Gamma(\lambda-\frac{\alpha}{\nu}+1)}{\Gamma(\frac{\alpha}{\nu})}n^{\frac{\alpha}{\nu}-1}$$

Для $\alpha=0.95$, $\lambda=-0.95$, $t=1000\ c$, $f(t)_{пер.}=0{,}001413$ та різних значень μ, ν і n результати f_n, $f(t)$ подані в Таблиці 1.

Таблиця 1

Результати розрахунку коефіцієнтів f_n, та функцій $f(t)$ і $f(t)_{пер.}$

	$\mu=0.9$, $\nu=-0.7$		$\mu=0.9$, $\nu=-0.9$	
n	f_n	$f(t)$	f_n	$f(t)$
0	1,022321	0,052509	1,060163	0,054452
1	-1,38744	-0,00856	-1,11906	-0,00096
2	0,247756	0,000535	0,031085	0,000521
3	0,053091	0,0021	0,009786	0,00097
4	0,021805	0,002586	0,004757	0,001179
5	0,011526	0,00276	0,002801	0,001297
6	0,006998	0,002817	0,001842	0,001371
7	0,004641	0,002821	0,001301	0,001422
8	0,003274	0,002802	0,000967	0,001457
9	0,002416	0,00277	0,000746	0,001483
10	0,001847	0,002734	0,000593	0,001503
11	0,001451	0,002695	0,000482	0,001518
12	0,001166	0,002656	0,000399	0,001529
13	0,000955	0,002617	0,000336	0,001539
14	0,000794	0,00258	0,000287	0,001546
15	0,000669	0,002544	0,000247	0,001552
16	0,000571	0,00251	0,000216	0,001557
17	0,000491	0,002477	0,00019	0,001561
18	0,000427	0,002446	0,000168	0,001564
19	0,000374	0,002416	0,00015	0,001566
20	0,00033	0,002387	0,000134	0,001568

Застосування біортогональних розкладів. В роботі побудовані квазіспектральні поліноми та повні біортогональні системи, досліджено їх властивості. На базі оператора інтегрування $L : L_{2,\rho}\left[-1,1\right] \to L_{2,\rho}\left[-1,1\right]$ з ваговою функцією $\rho = 1\Big/\sqrt{1-x^2}$, який для $f \in L_{2,\rho}\left[-1,1\right]$ ставить у відповідність вираз

$Lf\left(x\right) = \int\limits_{-1}^{x} dx_1 \int\limits_{-1}^{x_1} f\left(x_2\right) dx_2 = \int\limits_{-1}^{x} \left(x - x_1\right) f\left(x_1\right) dx_1$. на елементах базису із модифікованих поліномів Чебишова першого роду запропоновано оператор, на основі якого побудовані квазіортогональні та біортогональні базиси;

$$U_{2j}^{n}\left(x\right) = \sum_{i=1}^{s} c_{2i}\tilde{T}_{2i}\left(x\right),\ U_{2j-1}^{n-1}\left(x\right) = \sum_{i=1}^{s} c_{2i-1}\tilde{T}_{2i-1}\left(x\right),\ \bar{U}_{2j}^{n}\left(x\right) = \sum_{i=1}^{s} \bar{c}_{2i}T_{2i}\left(x\right),$$

$$\bar{U}_{2j-1}^{n-1}\left(x\right) = \sum_{i=1}^{s} \bar{c}_{2i-1}T_{2i-1}\left(x\right),\ V_{2i-1}^{n+1}\left(x\right) = \int\limits_{-1}^{x} U_{2j}^{n}\left(x_1\right) dx_1,\ V_{2i}^{n}\left(x\right) = \int\limits_{-1}^{x} U_{2j-1}^{n-1}\left(x_1\right) dx_1,$$

$$\bar{V}_{2i-1}^{n+1}\left(x\right) = -\sqrt{1-x^2} \int\limits_{-1}^{x} \frac{\bar{U}_{2j}^{n}\left(x_1\right)}{\sqrt{1-x_1^2}} dx_1,\quad \bar{V}_{2i}^{n}\left(x\right) = -\sqrt{1-x^2} \int\limits_{-1}^{x} \frac{\bar{U}_{2j-1}^{n-1}\left(x_1\right)}{\sqrt{1-x_1^2}} dx_1.$$

Однією з основних переваг застосування біортогональних базисів є те, що якщо за одним базисом біортогональних функцій відповідний ряд є повільно збіжним, то за іншим - швидкозбіжним. На сьогодні є небагато праць, присвячених їх дослідженню, а особливо практичному використанню. Це, в основному, викликано тим, що побудова біортогональних базисів пов'язана зі значними обчислювальними труднощами і вони недостатньо вивчені.

Побудовані біортогональні многочлени використані як для апроксимації цифрової інформації, так і для розв'язування наступної крайової задачі:

знайти розподіл функції $f\left(x,t\right)$ для довільного часу t, $t > 0$, на проміжку $x \in \left[-1,1\right]$, який задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 f\left(x,t\right)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial f\left(x,t\right)}{\partial t} = 0,$$

за наступних крайових умов: $f\left(x,0\right) = 0$,

$$f\left(-1,t\right) = \sqrt{\pi}\Big/\left(a\sqrt{t}\right),\quad f\left(1,t\right) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{l^2}{4a^2 t}}\Big/\left(a\sqrt{t}\right).$$

Знайдений розв'язок задачі записується у вигляді

$$\tilde{F}_{n+1}\left(x,t\right) = \sum_{\bar{i}=0}^{1}\sum_{i=1}^{s}\left(-1\right)^{\bar{i}} \frac{\pi^{\frac{3}{2}}\bar{c}_{1+\bar{i}}^{2i-1+\bar{i}}}{2^{2\bar{i}+1}\sqrt{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^{n}}N_{2i-\bar{i}}^{n}} \exp\left(-\frac{a^2}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^{n}}t\right)\times$$

$$\times\left(V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}\left(x\right) + \left(-1\right)^{\bar{i}}\tau_{2i-1+\bar{i}}^{n}T'_{n+1+\bar{i}}\left(x\right)\right)\int\limits_{0}^{\frac{a}{\sqrt{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^{n}}}\sqrt{t}} e^{q^2} dq.$$

Обчислювальний експеримент проводився при $n = 8$, $a = 0,5$ з точністю обчислень 10^{-8}. Результати подані у таблиці.

Таблиця 2

	$t = 0,5$	$t = 1$	$t = 10$	$t = 100$	$t = 500$
$f(-1,t)$	5,013	3,545	1,121	0,354	0,159
$\tilde{F}_{n+1}(-1,t)$	5,012	3,547	1,121	,355	,159
$\tilde{F}_{n+1}(-0.4,t)$	2,441	2,473	,860	,250	,111
$\tilde{F}_{n+1}(0,t)$	,677	1,304	,643	,179	,079
$\tilde{F}_{n+1}(0.4,t)$	,101	,495	,398	,108	,048
$\tilde{F}_{n+1}(1,t)$	-,012	,001	-,0001	-,0003	-,0003

Висновки. Отримані теоретичні та числові результати підтверджують ефективність застосування узагальнених многочленів Чебишева-Лагерра та побудованих біортогональних базисів для розв’язування крайових задач та задач апроксимації функцій. Зокрема, використання біортогональних базисів дозволяють проводити безумовну регуляризацію некоректних задач.

Список літератури

[1] Я.Д.П’янило, В.Г.Собко Побудова та дослідження біортогональних поліномів на базі многочленів Чебишева . – Прикл. проблеми мех.. і мат. – 2013.-Вип. 11.- С. 181-189.

[2] Ярослав П’янило, Марія Васюник, Іван Васюник Використання многочленів Лагерра до спектрального методу розв'язування рівнянь у дробових похідних за часом // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2013. – Вип.17. – С. 163-167.

[3] Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. — Москва: Высшая школа, 1975. — 407 с.

[4] Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. — Москва: Высшая школа, 1965. — 466 с.