

МЕТОДИ ВСТАНОВЛЕННЯ ПРИХОВАНИХ ПЕРІОДИЧНОСТЕЙ ДЛЯ ПРОЦЕСІВ ПРИТАМАННИХ СПОРТИВНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ
Ярослав П'янило¹, Анатолій Лопатьєв^{1,2}, Андрій Власов², Галина П'янило¹, Олена Гапка¹

¹Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України
²Львівський державний університет фізичної культури

Вступ. Основним джерелом вхідної інформації для проведення досліджень природних, біологічних та технологічних процесів є заміри певних параметрів досліджуваних процесів. Очевидно, що заміри отримуються застосуванням відповідних приладів. Кожен з них має певну похибку, яку необхідно враховувати в процесі дослідження. У зв'язку з тим необхідно проводити попередню обробку вхідної інформації. Разом з тим, на базі заміряної інформації можна отримати важливу інформацію про досліджуваний об'єкт. Це буває тоді, коли не вдається на базі певних фізичних, суспільних або інших законів побудувати відповідні математичні моделі. Інший випадок, коли процеси відбуваються в умовах значної невизначеності, наприклад, медична інформація. У зв'язку з тим, важливим є питання ефективного застосування теорії статистичного та ймовірностного оброблення цифрової інформації. Зауважимо, що в певному сенсі покази приладів можна вважати випадковими величинами.

Метою праці є пошук та інтерпретація прихованих періодичностей стосовно числових рядів, що мають місце в тренувальній та змагальній діяльності спортсменів.

Об'єктом дослідження є цифрова інформація про відповідні процеси, що досліджуються та основні способи її вивчення.

Результати дослідження. Часові ряди досліджуються з різними цілями. В одному ряді випадках буває достатньо отримати опис характерних особливостей ряду, а в іншому ряді випадків потрібно не тільки передбачати майбутні значення часового ряду, а й управляти його поведінкою. Метод аналізу часового ряду визначається, з одного боку, цілями аналізу, а з іншого боку, ймовірнісною природою формування його значень.

Поширеними методами аналізу часових рядів є: спектральний аналіз, кореляційний аналіз, моделі авторегресії і ковзного середнього, багатоканальні моделі авторегресії, прогноз експоненціально зваженим ковзаючим середнім тощо.

Зазвичай аналіз цифрової інформації можна поділити на такі етапи:

1. Графічне подання і опис поведінки цифрового ряду.
2. Виділення та видалення закономірних складових ряду, що залежать від часу: тренд, циклічні складові.
3. Виділення та видалення низько- або високочастотних складових процесу (фільтрація).

4. Дослідження випадкової складової ряду, що залишилася після видалення перерахованих вище складових.
5. Побудова (підбір) математичної моделі для опису випадкової складової і перевірка її адекватності.
6. Прогнозування майбутнього розвитку процесу.

На практиці не завжди вдається одержати закон розподілу випадкової величини, тому що цей закон є надто складним для практичних розрахунків. Отож, з'явилася потреба характеризувати випадкову величину з допомогою таких числових характеристик: математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення.

Математичним сподіванням $M(\xi)$ випадкової величини ξ називається число, яке дорівнює сумі добутків усіх можливих значень x на відповідні їм ймовірності, якщо ξ - дискретна випадкова величина:

$$M(\xi) = \sum_i x_i p_i$$

Математичне сподівання дискретної випадкової величини ξ характеризує її середнє значення $\bar{\xi}$ (середнє арифметичне):

$$\bar{\xi} = \xi_c = M(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}$$

із врахуванням ймовірностей його можливих значень. На практиці під математичним сподіванням розуміють центр розподілу випадкової величини.

Математичним сподіванням $M(\xi)$ випадкової величини ξ , якщо ξ - неперервна випадкова величина має такий вигляд:

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

Дисперсією $D(\xi)$ дискретної випадкової величини ξ називається число, яке дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D(\xi) = M\left(\left[\xi - M(\xi)\right]^2\right).$$

Дисперсією $D(\xi)$ неперервної випадкової величини визначають так:

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - [M(\xi)]^2.$$

Дисперсія випадкової величини характеризує розсіювання можливих значень випадкової величини відносно центру розподілу. Дисперсія вимірюється у квадратних одиницях розмірності випадкової величини.

Середньоквадратичне відхилення $\sigma(\xi)$ випадкової величини ξ дорівнює квадратному кореню з дисперсії:

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}.$$

Середньоквадратичне відхилення має розмірність випадкової величини.

В дискретному варіанті приведені вище величини обчислюються за наступними формулами.

Вибіркова середня:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Вибіркова дисперсія:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n n_i x_i^2 - n \bar{x}^2 \right).$$

Вибіркове середньоквадратичне відхилення:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Нехай x_1, x_2, \dots, x_n – випадкова вибірка з розподілу $F_1(x)$, а y_1, y_2, \dots, y_n – випадкова вибірка з розподілу $F_2(x)$. Вибірковий коефіцієнт кореляції:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

Методи визначення скритих періодичностей. Оброблення деяких часових рядів, наприклад часових рядів споживання енергії або електрокардіограми, ми стикаємося з тим, що вони мають періодичну компоненту. Існує кілька методів виявлення періодів: алгоритми автокореляційної функції, метод найменших квадратів, застосування перетворення Фур'є та інтегрального перетворення Лапласа.

Автокореляційна функція досліджує цифровий ряд на наявність періодичної компоненти, розбиваючи ряд на кілька тимчасових відліків і порівнюючи з самим собою. Більш докладно алгоритм автокореляційної функції представлений в книгах [1, 5, 4].

Автоковаріацією γ_k часового ряду z_t з затримкою k називають вираз:

$$\gamma_k = \text{cov}\{z_t, z_{t+k}\} = E\{(z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu)\} \quad (1)$$

в якому E — символ обчислення математичного очікування від виразу, що стоїть у фігурних дужках. Зрозуміло, що

$$\gamma_0 = E\{(z_t - \mu)^2\} = \sigma_z^2$$

— дисперсія часового ряду z_t .

Для отримання статистичної оцінки γ_k^* автоковаріації γ_k використовують вираз

$$\gamma_k^* = \frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} (z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu). \quad (2)$$

Автоковаріація γ_k характеризує ступінь лінійного зв'язку між значеннями часового ряду z_t та z_{t+k} . Зрозуміло, що:

$$\begin{cases} |\gamma_k| \leq \gamma_0, \\ \gamma_k = \gamma_{-k}. \end{cases}$$

Автокореляцією ρ_k часового ряду z_t із затримкою k називають вираз:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{E\{(z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu)\}}{E\{(z_t - \mu)^2\}}. \quad (3)$$

Метод найменших квадратів (МНК) обчислює тригонометричну апроксимацію даного на вхід ряду. Так як будь-яка послідовність, що володіє періодичністю може бути розкладена в ряд Фур'є, необхідно прийняти коефіцієнти перед синусами і косинусами за коефіцієнти регресії і оцінити їх величину. Якщо знайдена кореляція (коефіцієнт при певному синусі або косинусі) велика, то можна зробити висновок, що існує періодичність на відповідній частоті в даних.

Застосування інтегрального перетворення Лапласа. Поряд з перетворенням Фур'є останнім часом для обробки експериментальних даних застосовуються і інші ортогональні базиси (Якобі, Лагерра і т.п.) та інтегральні перетворення (Лапласа, Мелліна і т.п.), які дають можливість більш адекватно врахувати особливості процесу, що аналізується і різні класи сигналів. Разом з тим деякі інтегральні перетворення, зокрема Лапласа, періодичних функцій мають спеціальний попередньо відомий вид. Його можна використати для виявлення прихованих періодичностей.

Перетворення Лапласа $X(p)$ оригіналу $x(t)$ задається формулою

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt, \quad (4)$$

де p - параметр перетворення. Якщо функція $x_1(t)$ періодична з періодом T , то її зображення Лапласа $X_1(p)$ має вид [3,4]

$$X_1(p) = \frac{\int_0^T x_1(t) e^{-pt} dt}{1 - \exp(-pT)}. \quad (5)$$

Співвідношення (5) запишемо у вигляді

$$(1 - \exp(-pT)) X_1(p) - \int_0^T x_1(t) e^{-pt} dt = 0. \quad (6)$$

Очевидно, що розв'язками рівняння (6) будуть числа, кратні періодам вихідного сигналу. Оскільки сигнал $x_1(t)$ періодичний, то множина розв'язків рівняння (6) обмежена знизу періодом T . На практиці, як правило, відомі дискретні значення сигналів $x_1(t)$ в точках $t_j, j=1, \dots, J$. Тому для обчислення інтегралів, що входять в рівняння (6), необхідно застосовувати квадратурні формули. Вибір цих формул залежить як від необхідної точності обчислення, так і від розміщення точок відліку.

Один з варіантів обчислення інтегралів, що входять в рівняння (6), тісно пов'язаний із задачею апроксимації сигналів спектральним методом в базисі многочленів Якобі $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$.

Асимптотичний метод. Для апробації методу розглянемо функцію $f(t) = \sin(bt)$. Очевидно, що її періодом є число $T = 2\pi/b$. В цьому випадку рівняння

$$(1 - \exp(-pT))X_1(p) - \int_0^T x_1(t) e^{-pt} dt = 0$$

переходить в рівняння

$$bp(1 - \exp(-pT)) - e^{-pT}[-p \sin(bT) + p \cos(bT)] + p = 0.$$

Нехай параметри b та p є достатньо малими. Тоді

$$e^{-pT} \approx 1, \quad \cos(bT) \approx 1, \quad \sin(bT) \approx bT, \quad 1 - \exp(-pT) \approx 0$$

і для знаходження прихованого періоду отримується рівняння $\sin(bT) = 0$, звідки $T = 2\pi/b$.

За таких припущень отримується точний результат.

Застосування перетворення Фур'є. Задача виявлення прихованих періодичностей полягає в тому, щоб із заданого набору значень вихідного сигналу $x(t)$, визначеного на проміжку $[a, b]$, виділити періодичну складову $x_1(t)$ [1,2,8], тобто отримати співвідношення

$$x(t) = x_1(t) + u(t),$$

де $u(t)$ - випадковий залишок. Оскільки складова сигналу $x_1(t)$ періодична, то її доцільно розкласти в ряд за періодичними функціями, наприклад, в ряд Фур'є

$$x_1(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega t + b_n \sin \omega t.$$

Основна ідея полягає в тому, щоб вихідний сигнал $x(t)$ перетворити таким чином, щоб підсилити роль періодичної компоненти і використання явища резонансу. Так, у випадку застосування перетворень Фур'є

$$A(\omega) = \int_0^T x_1(t) \cos \omega t dt$$

та

$$B(\omega) = \int_0^T x_1(t) \sin \omega t dt,$$

якщо частоти ω_j гармонічних компонент, що входять у вихідний сигнал не є досить близькими, то графік функції

$$r(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$$

відносно ω є крива з різко вираженими максимумами в точках $\omega = \omega_j$.

На рисунку 1 подані дані частоти серцевих скорочень (ЧСС) людини через кожні 12 секунд. Окрім цього, подана поліноміальна лінія тренду шостого порядку та значення достовірності інформації.

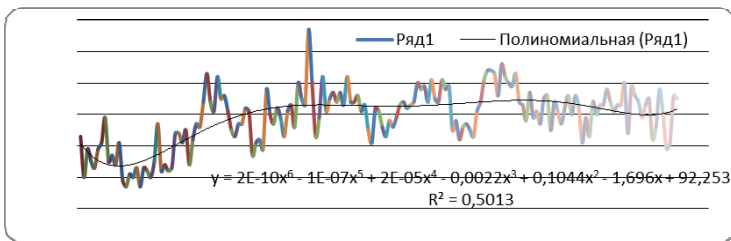


Рис.1. Значення частоти серцевих скорочень (ЧСС) людини через кожні 12 секунд та відповідна лінія тренду

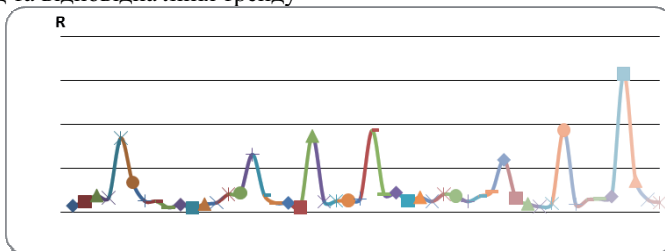


Рис.2. Значення функції $r(\omega)$ від ω на проміжку $\omega \in [0,5]$.

Висновки. Як показують числові експерименти, приведені методи визначення прихованих періодичностей дають можливість достатньо точно і достовірно знаходити їх на базі заданої цифрової інформації. Разом з тим, як видно з рис.2, коректний аналіз поведінки функції $r(\omega)$ дозволяє отримати додаткову корисну інформацію.

Список літератури

1. Біомеханіка спорту / За заг. ред. А.М. Лапутіна. – К.: Олімпійська література, 2001. – 319 с.
2. П'янило Я. Д. Проекційно-ітераційні методи розв'язування прямих та обернених задач переносу. – Львів: Сплайн, 2011.- 248 с.
3. А. Власов, А. Демічковський, О. Івашенко, А. Лопатьєв, М. Пітин, Я. П'янило, О. Худолій Системний підхід і математичне моделювання біологічних та природних об'єктів і процесів / Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, - 2016, № 23, с.17-28.
4. Бат М. Спектральний аналіз в геофізиці / М. Бат. - Москва: Недра, 1980. - 535 с.
5. Голд Б. Цифрова обробка сигналів / Б. Голд, Ч. Рэйдер. — Москва: Сов. радио, 1973. — 368 с.
6. Толстов Г. П. Ряды Фурье / Г. П. Толстов. -Москва: Наука, 1980. - 384 с.
7. Серебренников, М. Г. Выявление скрытых периодичностей / М.Г.Серебренников, А. А. Первозванский. - Москва: Наука, 1965. - 244 с.