УДК 51-7:519.87

ОСНОВНІ ПІДХОДИ ДО АНАЛІЗУ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

Ярослав П'янило[1], Анатолій Лопатьєв[1,2], Андрій Власов[2], Галина П'янило[1], Андрій Демічковський[2]

[1]Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України

[2]Львівський державний університет фізичної культури

Вступ. Дослідження багатьох фізичних, природних, біологічних та технологічних процесів базується на замірах певних параметрів досліджуваних процесів. Коректне оброблення отриманої цифрової інформації дозволяє знайти певні закономірності досліджуваного процесу. Особливо це стосується випадку, коли отримані цифрові дані отримані в умовах значної невизначеності.

Тому важливим є питання ефективного застосування теорії статистичного та ймовірностного оброблення числової інформації.

Часові ряди досліджуються з різними цілями. В одному ряді випадках буває достатньо отримати опис характерних особливостей ряду, а в іншому ряді випадків потрібне не тільки передбачати майбутні значення часового ряду, а й управляти його поведінкою. Метод аналізу часового ряду визначається, з одного боку, цілями аналізу, а з іншого боку, ймовірнісною природою формування його значень.

Поширеними методами аналізу часових рядів є: спектральний аналіз, кореляційний аналіз, моделі авторегресії і ковзного середнього, багатоканальні моделі авторегресії, прогноз експоненціально зваженим ковзаючим середнім тощо.

Метою праці є розроблення методики оброблення числових рядів, що мають місце в тренувальній та змагальній діяльності спортсменів та пошук закономірностей та зв'язків між процесами, що досліджуються.

Об'єктом дослідження є цифрова інформація про відповідні процеси, що досліджуються та основні способи її вивчення.

Основні числові характеристики вибіркової сукупності. Вибіркова середня:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Вибіркова дисперсія:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2 - n\cdot\overline{x}^2\right).$$

Вибіркове середньоквадратичне відхилення:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2} .$$

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – випадкова вибірка з розподілу $F_1(x)$, а $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – випадкова вибірка з розподілу $F_2(x)$. Вибірковим коефіцієнтом кореляції називають:

$$r = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}}.$$

Аналіз статистичних зв'язків. При аналізі багатовимірних даних важливу роль відіграє поняття типу змінних, які описують об'єкт. Виділяють два типи змінних: кількісні і номінальні. Значення кількісних змінних отримують шляхом вимірювання або підрахунку (ріст, вага, час, температура, число організмів і т. д.). Для кількісної змінної має зміст обчислити середнє із декількох її значень. Номінальні змінні можуть приймати два і більше значень, які не є числами і не впорядковані між собою. Значення номінальної змінної відповідає віднесенню об'єкта до деякого класу або категорії (стать, вид, колір, місце проживання і т. д.).

Формою представлення багатовимірних даних є матриця, яка містить N рядків і M стовпчиків:

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{1M} \\ \vdots & \vdots \\ x_{N1} & x_{NM} \end{pmatrix}.$$

Тут елемент x_{ij} цієї матриці визначає значення j-тої змінної X_j для i-того спостереження.

У якості міри зв'язку між кількісними змінними використовують коефіцієнт кореляції між ними:

$$R_{jl} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N}\left(x_{ij} - A_j\right)\left(x_{il} - A_l\right)}{\left(N-1\right)S_j S_l},$$

де A_j і A_l – середні значення змінних X_j та X_l, відповідно; S_j і S_l – середні квадратичні відхилення цих змінних.

Метод аналізу зв'язку припускає розбиття вихідної сукупності змінних на дві множини M_1 і M_2. Нехай, наприклад, перша множина змінних $X_1,\ldots,X_{M-1}$ (M_1=M-1) відіграє роль пояснюючих змінних, а друга множина змінних Y (M_2=1) - роль пояснювальної змінної.

На практиці можуть реалізуватися такі випадки:

1. Якщо $X_1,\ldots,X_{M-1}$ та Y – кількісні змінні, то має місце регресійний аналіз.
2. Якщо $X_1,\ldots,X_{M-1}$ – кількісні змінні, а Y – номінальна змінна, то задача розв'язується методом дискримінантного аналізу.
3. Якщо $X_1,\ldots,X_{M-1}$ – номінальні змінні, а Y – кількісна змінна, то має місце дисперсійний аналіз.
4. Якщо $X_1,\ldots,X_{M-1}$ та Y – номінальні змінні, то така задача носить назву розпізнання образів.

Основними задачами при обробці інформації є:

- апроксимація сигналів;
- стиск інформації;
- фільтрація сигналів.

На даний час існує велика кількість методів обробки цифрової інформації. Основними з них є спектральні в таких базисах, де існують швидкі перетворення. Це, зокрема, базиси тригонометричних функцій, Фур'є, Хаара, Уолша і деякі інші. З проведеного аналізу випливає що вони задовольняють не всім вимогам, які на даний час ставляться при розв'язуванні прикладних задач.

Названі вище ортогональні базиси задовольняють критеріям оптимальності, швидкодії і деяким іншим. Однак, оскільки задачі обробки інформації є некоректними за Тихоновим, ці базиси не дозволяють ефективно використати апріорну інформацію для побудови регуляризуючих розв'язків і, як наслідок, не завжди вдається дотриматись критеріїв достовірності та точності кінцевого результату. В зв'язку з тим за останній час широкого вжитку при розв'язуванні задач обробки інформації набули інші ортогональні базиси, зокрема базиси класичних ортогональних многочленів Якобі та Чебишева-Лагерра.

Знаходження узагальнених спектрів на основі квадратурних формул. Спектральні методи уможливлюють розв'язувати задачі у тому випадку, коли функції, що входять у математичну модель опису фізичного процесу, зображаються збіжними рядами за даним базисом. У теорії ортогональних рядів наводяться теореми, у яких сформульовано умови збіжності.

При внесенні вхідних значень у дискретній формі, тобто відомі значення функції $\varphi(x_j)$ в точках x_j, $j=\overline{1,N}$, то для знаходження узагальнених спектрів можна використати квадратурні формули для обчислення інтегралів (1.3) і (1.4), метод найменших квадратів або ж інші способи. У деяких випадках, залежно від вхідної інформації, можна вказати оптимальні у класі L_2 формули для обчислення узагальнених спектрів.

Нехай многочлени $u_n(x)$ ортогональні на проміжку $[a,b]$ і функція $\varphi(x)$ подається ортогональним рядом за даними многочленами

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi_n}{r_n}u_n(x). \qquad (1)$$

Відомо, що $N+1$–ий ортогональний многочлен має $N+1$ дійсний корінь, який належить до проміжку ортогональності. Для обчислення узагальнених спектрів φ_n є оптимальна в L_2 квадратурна формула

$$\varphi_n=\sum_{j=0}^{N}\rho_j^2\,u_n(x_j)\,\varphi(x_j), \qquad (2)$$

де x_j - корені многочлена $u_{N+1}(x)$, тобто $u_{N+1}(x_j)=0$, а

$$\rho_j^{-2}=\sum_{i=0}^{N}u_i^2(x_j).$$

У випадку розв’язування прикладних задач інформація, зазвичай, фіксується у рівновіддалених точках t_j, водночас, як корені многочленів, що входять у квадратурні формули типу (2) розміщені на проміжку ортогональності у загальному нерівномірно. Тому, щоб використати формулу (2) для обчислення коефіцієнтів Фур’є-Якобі, треба, щоб значення функції $\varphi(x)$ були задані у коренях відповідного многочлена Якобі. Для опрацювання даних треба знайти залежність, яка уможливлювала б переведення рівновіддалених точок t_i у відповідні корені многочленів Якобі.

Якщо проміжок ортогональності [-1,1] перевести в $[0,\pi]$ за формулою

$$x = cos\Theta, \qquad \Theta = arccosx,$$

то корені $\Theta_i = arccos\, x_i$ будуть майже рівномірно, із точністю до кількох значних цифр, розміщені на проміжку $[0,\pi]$. Звідси наслідком є спосіб переведення рівномірної шкали t_i у корені x_i для многочлена Якобі.

Лінійною заміною
$$\Theta = at + b \tag{3}$$
значення t_i, $i=\overline{1,N+1}$, переведемо у корені Θ_i так, щоб t_1 переходило в Θ_1, а t_{N+1} в Θ_{N+1}. Тоді формула (3) буде такою

$$\Theta = \frac{\Theta_{N+1} - \Theta_1}{t_{N+1} - t_1} t + \frac{\Theta_1 t_{N+1} - \Theta_{N+1} t_1}{t_{N+1} - t_1}.$$

Переходячи в останній формулі до змінної x, отримуємо

$$x_i = cos\left[\frac{\Theta_{N+1} - \Theta_1}{t_{N+1} - t_1} t_1 + \frac{\Theta_1 t_{N+1} - \Theta_{N+1} t_1}{t_{N+1} - t_1}\right], \qquad i=\overline{1,N+1}. \tag{4}$$

Ця формула уможливлює переведення точки t_i рівномірної шкали у точки x_i, які є коренями многочлена $P_{N+1}(x_i) = 0$.

Для прикладу розглянемо рівномірну шкалу $t_i = 2i$. Результати обчислень для $N = 47$ відображено у таблиці 1, де x_i – точне значення кореня, а $\tilde{x}_i$ – значення кореня, обчислене за формулою (4).

Таблиця 1

Точні x_i та наближені $\tilde{x}_i$ значення коренів, обчислені за формулою (4) для $N = 47$, $i=\overline{1,7}$.

i	t_i	Θ_i	$\tilde{x}_i$	x_i	ε
			наближене	точне	
1	2	3.09201	-0.99877	-0.99877	0.000002
2	4	3.02727	-0.99347	-0.99353	0.0057
3	6	2.96254	-0.98401	-0.98412	0.011
4	8	2.89781	-0.97043	-0.97059	0.016
5	10	2.83307	-0.95278	-0.95298	0.021
6	12	2.76834	-0.93114	-0.93138	0.025
7	14	2.70361	-0.90561	-0.90587	0.029

Із вже наведених результатів зрозуміло, що формула (4) дає можливість отримати 3–4 точних цифри значень коренів многочленів Якобі.

Коефіцієнти φ_n залежать від значень коренів x_i і значень функції $\varphi(x_i)$. Аналіз результатів обчислювального експерименту дає можливість зробити висновок, що похибка у значеннях функції $\varphi(x_i)$ має значно менший вплив на точність обчислень коефіцієнтів φ_n, ніж похибка у визначенні значень коренів x_i. Якщо взяти до уваги, що при реальних вимірюваннях значення t_i визначаються із деякою похибкою (загалом, не більше 3-4 точних значних цифри), то можна вважати, що формула (4) уможливлює задовільне переведення точки t_i у корені x_i. Тому, будемо вважати, що значення функції $\varphi(x_i)$ задаються у відповідному i-му корені многочлена Якобі.

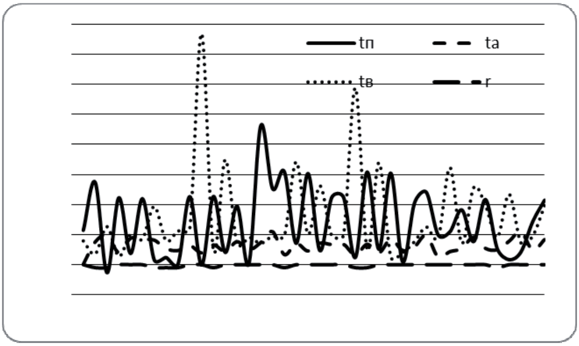

Рис. 1. Значення часів часів підготовки до пострілу t_n, пострілу t_a та відпочинку $t_в$ для 40 пострілів. По осі абсцис – порядковий номер пстрілу, по осі ординат – час.

Значення коефіцієнтів кореляції (жінки) для різних серій пострілів подано в таблиці 2.

Таблиця 2.

Значення коефіцієнтів кореляції (жінки) для різних серій пострілів.

коефіцієнт кореляції 1-10 постріли				
прицілювання	актв. постріл	відпочинок	загальний час	Результат
п/а	а/в	а/р	з/р	п/р
-0,14291194	0,371148699	-0,28662594	0,344193	0,357294342
коефіцієнт кореляції 11-20 постріли				
0,294484824	-0,36615805	0,254499444	0,182651	-0,2794239
коефіцієнт кореляції 21-30 постріли				
0,720470538	-0,61548239	0,35657976	-0,54163	-0,00987533
коефіцієнт кореляції 31-40 постріли				
-0,26080042	0,116597854	0,190692867	0,450629	0,307274612
коефіцієнт кореляції 1-40 постріли				
0,13731981	-0,22057252	0,059290609	0,167098	0,114792445

Висновки. Як видно з рисунків, ЧСС людини змінюється на протязі дня в залежності від часу і має коливний характер з певними періодами. Періоди ЧСС, в свою чергу, залежать від активності людини та періоду доби. Разом з тим, ЧСС має тенденцію до зменшення амплідути. Окрім цього, значення ЧСС суттєво залежить від завантаженості людини. Все це підтверджує необхідність в проведенні достатньо детальних досліджень ЧСС людини та вплив на неї як зовнішніх, так і внутрішніх факторів і кореляцію між ними.

Список літератури

1. Біомеханіка спорту / За заг. ред. А.М. Лапутіна. – К.: Олімпійська література, 2001. – 319 с.
2. Годик М.А. Спортивная метрология: Учебник для институтов физической культуры. – М.: Физкультура и спорт, 1988. – С. 26-28.
3. П'янило Я. Д. Проекційно-ітераційні методи розв'язування прямих та обернених задач переносу. – Львів: Сплайн, 2011.- 248 с.
4. Hotra O., Pyanylo Ja. Approximation of sensor output data using Chebyshev-Laguerre polynomials // Rzegląd elektrotechniczny (Electrical Review), ISSN 0033-2097, R. 88 NR 10b/2012 P.85-87.
5. Mika P. Tarvainen. Kubios HRV version 2.0, user's guide / Mika P. Tarvainen, Uha-Pekka Niskanen. – University of Kuopio, Kuopio, Finland, 2008. – P. 53.